



① حاصل عبارت  $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$  به ازای  $x = \sqrt{2} - 1$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{2} - 1$  (۲)  $3\sqrt{2}$  (۳) ۴ (۴) ۳

② حاصل عبارت زیر برابر با کدام گزینه است؟

$$\frac{\sqrt[3]{6} \times (\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{27})^2}{\sqrt{\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{18}}}$$

- (۱)  $2^{\frac{1}{3}}$  (۲)  $3^{\frac{1}{3}}$   
(۳)  $6^{\frac{1}{3}}$  (۴)  $2^{\frac{2}{3}}$

③ اگر  $\frac{x^2-1}{x} = 2$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{x^3}{x^2-1}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{14}$  (۲) ۱۴ (۳) ۲ (۴)  $\frac{1}{2}$

④ حاصل  $(3 + \sqrt{2})^3 - (3 - \sqrt{2})^3$  کدام است؟

- (۱)  $58\sqrt{2}$  (۲)  $30\sqrt{2}$  (۳)  $55\sqrt{2}$  (۴)  $35\sqrt{2}$

⑤ اگر  $a = \sqrt[4]{\sqrt[4]{2^{35}}}$  باشد، حاصل عبارت  $A = a \times \sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[4]{a^2}$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

⑥ حاصل  $(13 - \sqrt{7}) \left( \frac{12}{\sqrt{7}+2} + \frac{18}{\sqrt{7}-1} + \frac{12}{\sqrt{7}+3} \right)$  کدام است؟

- (۱) ۱۵۲ (۲) ۱۵۴  
(۳) ۱۵۸ (۴) ۱۶۲

⑦ در تساوی  $\frac{6+3\sqrt{x}+A}{x-1} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$  عبارت A کدام است؟

- (۱)  $\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x}$  (۲)  $\sqrt[3]{x^3 + x}$  (۳)  $\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x}$  (۴)  $\sqrt[3]{x^3} + 2\sqrt{x}$

⑧ حاصل  $\frac{2}{\sqrt{48}-\sqrt{12}-\sqrt{3}}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  (۳)  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

⑨ در تساوی  $\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{ax+b}{x^2-1}$  حاصل ab کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

⑩ در تساوی  $(\sqrt{18} + \sqrt{8})(\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{16})x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  مقدار x کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{6}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{9}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{12}$

۱۱) اگر  $A = \sqrt[5]{8\sqrt[4]{4}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{5}}$  و  $B = (\sqrt{(\sqrt{3}+1)})^{\frac{2}{5}} \times (\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{5}} \times 4^{\frac{1}{5}}$  باشد، حاصل  $A+B$  کدام است؟

- ۴ (۱)      ۵ (۲)      ۶ (۳)      ۷ (۴)

۱۲) خلاصه شده عبارت  $\frac{4^{90/75}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + 9^{90/25}$  کدام است؟

- $\sqrt{2}-1$  (۱)       $\sqrt{2}+1$  (۲)       $\sqrt{2}$  (۳)      ۱ (۴)

۱۳) اگر مخرج کسر  $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$  را گویا کنیم به طوری که مخرج کسر ۶ باشد، آنگاه صورت آن کدام است؟

- ۴ -  $\sqrt{4}$  -  $\sqrt{2}$  (۱)      ۴ +  $\sqrt{4}$  +  $\sqrt{2}$  (۲)      ۴ +  $\sqrt{16}$  +  $\sqrt{2}$  (۳)      ۴ +  $\sqrt{16}$  +  $\sqrt{4}$  (۴)

۱۴) اگر  $x^3 = 8y^3 + (x-2y)A$  باشد، کدام عبارت، یک عامل برای  $A+3xy$  است؟

- $x-y$  (۱)       $x+y$  (۲)       $x-2y$  (۳)       $x+2y$  (۴)

۱۵) در تجزیه عبارت  $y^4 - 3y^2 + 1$  کدام عبارت موجود است؟

- $y^2 - y - 1$  (۱)       $y^2 - 2y - 1$  (۲)       $y^2 + y + 1$  (۳)       $y^2 + 2y + 1$  (۴)

۱۶) حاصل عبارت  $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$  به ازای  $x = \frac{1}{2}$  و  $y = \frac{1}{3}$  کدام است؟

- $\frac{26}{27}$  (۱)       $\frac{27}{26}$  (۲)       $\frac{1}{27}$  (۳)      ۲۷ (۴)

۱۷) عدد  $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$  را با کدام عدد زیر جمع کنیم تا یک عدد گویا حاصل شود؟

- $\sqrt{7}$  (۱)       $\sqrt{2}$  (۲)       $\sqrt{3}$  (۳)       $\sqrt{48}$  (۴)

۱۸) اگر  $\frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{256}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{33}-\sqrt{3}} = k(2\sqrt{3}+1)$  باشد، آنگاه مقدار  $\sqrt[3]{k}$  کدام است؟

- $\sqrt[3]{2}$  (۱)       $\sqrt[3]{3}$  (۲)      ۲ (۳)      ۱ (۴)

۱۹) اگر  $A = \sqrt[5]{9\sqrt{3}}(12)^{-1/5}$  باشد، حاصل  $(1+A^{-1})^{\frac{1}{2}}$ ، کدام است؟

- ۳ (۱)      ۴ (۲)      ۵ (۳)      ۶ (۴)

۲۰) اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $3 = (2x-3)^2 + 1$  باشند، حاصل  $|x_1 - x_2|$  کدام است؟

- $3 + \sqrt{2}$  (۱)       $3 - \sqrt{2}$  (۲)       $\sqrt{2}$  (۳)      ۳ (۴)

۲۱) اگر  $x+y = 4\sqrt{xy}$  باشد، حاصل عبارت تعریف شده  $\frac{x^2+y^2+4xy}{x^2+y^2-5xy}$  برابر کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۵ (۳)      ۱۰ (۴)

۳۲) اگر گویا شده کسر  $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$  به صورت  $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(4+2\sqrt{2}+\sqrt{3})}{a}$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۸ (۴) ۶

۳۳) حاصل عبارت  $A = (x-2)(x^6 + 4x^2 + 16)(x+2) + 60$  به ازای  $x = \sqrt[3]{5}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt[3]{25} - 4$  (۲) ۱ (۳)  $\sqrt[3]{5} - 4$  (۴) ۲۱

۳۴) در تجزیه عبارت  $y^5 + 2y^3 - 24y$  کدام عامل وجود ندارد؟

- (۱)  $y^2 + 6$  (۲)  $y - 2$  (۳)  $y + 2$  (۴)  $y - 4$

۳۵) اگر  $A = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$  باشد، آنگاه حاصل  $A + A^{-1}$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳) ۴ (۴)  $2 + \sqrt{3}$

۳۶) هرگاه  $a + a^{-1} = 3$  باشد، آنگاه حاصل  $a^3 + \frac{1}{a^3} - 2$  کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۸ (۳) ۱۶ (۴) ۱۲

۳۷) حاصل عبارت  $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})$ ، کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$  (۲) ۲ (۳)  $1 + \sqrt{3}$  (۴)  $2\sqrt{3}$

۳۸) در تجزیه عبارت  $x^7 - 16x^3$ ، کدام عامل ضرب موجود نیست؟

- (۱)  $x^2 + 4$  (۲)  $x + 2$  (۳)  $x - 2$  (۴)  $x - 2\sqrt{2}$

۳۹) حاصل عبارت  $\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\sqrt{5} - \sqrt{2}$  (۳)  $-2 + \sqrt{3}$  (۴)  $\sqrt{5} - 1$

۴۰) اگر  $\frac{3x}{x^2+1} = 1$  باشد، حاصل  $x^6 + \frac{1}{x^6}$  کدام است؟

- (۱) ۲۲۲ (۲) ۳۲۰ (۳) ۳۲۲ (۴) ۲۳۲

۴۱) اگر  $x = 1 + \sqrt[3]{3}$ ، آنگاه حاصل  $(\frac{x^3-4}{x})^3$  کدام است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۹ (۳) ۸۱ (۴) ۱

۴۲) حاصل عبارت  $A = \sqrt{3 + \sqrt{2\sqrt{7}+1}} - \sqrt{3 - \sqrt{2\sqrt{7}+1}}$  چند برابر  $\sqrt{7}+1$  است؟

- (۱)  $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$  (۲)  $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$  (۳)  $\frac{2+\sqrt{7}}{6}$  (۴)  $\frac{7-\sqrt{7}}{6}$

۴۳) اگر  $a = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$  و  $b = \frac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$  باشد، حاصل  $\sqrt{a-1} + \sqrt{b+1}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt[3]{2}$  (۲)  $\sqrt[3]{3}$  (۳)  $2\sqrt[3]{2}$  (۴)  $2\sqrt[3]{3}$

۴۴) کسر تعریف شده  $\frac{y^5-y^3-12y}{8y^4+16y}$ ، پس از ساده سازی کامل شامل کدام عامل است؟

- (۱)  $y$  (۲)  $y-2$  (۳)  $y^2+2$  (۴)  $y^2-3$

۳۵ مقدار  $x$  از معادله  $\frac{1}{1+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{x}{7}$  کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

۳۶ اگر مخرج عبارت  $\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt{x}}$  را گویا کنیم، به صورت  $\frac{\sqrt[3]{x}A}{x-1}$  می‌شود.  $A$  همواره کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{x}-1$  (۲)  $\sqrt[3]{x}-1$  (۳)  $1-\sqrt{x}$  (۴)  $\sqrt{x}-1$

۳۷ اگر  $x^2 + \frac{7}{x^2} = 29$  باشد، حاصل  $x^3 - \frac{7}{x^3}$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۴۰ (۲) ۱۴۵ (۳) ۱۵۰ (۴) ۱۵۵

۳۸ کدام تساوی نادرست است؟

(۱)  $12x^6 - 48x^6 = 12x^6(x-2)(x+2)$

(۲)  $x^8 - 625x^6 = x^6(x-5)(x+5)(x^2+25)$

(۳)  $x^6 - 13x^2 + 36 = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$

(۴)  $x^2 + 4 + y^2 + 4x + 4y + 2xy = (x+1+y)^2$

۳۹ حاصل عبارت  $(\sqrt{7}-\sqrt{6})^{\sqrt{7}-\sqrt{6}} \times (\sqrt{7}+\sqrt{6})^{\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{7}-\sqrt{6}$  (۲) ۳ (۳) ۱ (۴)  $\sqrt{6}-\sqrt{7}$

۴۰ اگر  $x = \sqrt[3]{2}-1$  و  $y = \sqrt[3]{2}+1$  و  $z = xy + y + 1$  باشد، حاصل  $\frac{1}{z^3} + \frac{6}{z^2} + \frac{12}{z} + 8$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $x^3$  (۳)  $y^3$  (۴)  $z^3$

۴۱ اگر  $x+y=6$  و  $xy=4$ ، حاصل عبارت  $x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{50}$  (۲)  $\sqrt{40}$  (۳)  $\sqrt{45}$  (۴)  $\sqrt{35}$

۴۲ اگر  $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = 2\sqrt{3}(A+2)$  باشد،  $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$  آن‌گاه  $A^2$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{7}{25}$  (۳)  $\frac{9}{7}$  (۴)  $\frac{7}{3}$

۴۳ حاصل عبارت  $A = \frac{1}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{7}+1} + \frac{3}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{7}+1}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt[3]{2}$  (۲)  $2\sqrt[3]{2}$  (۳) ۲ (۴) ۴

۴۴ حاصل عبارت  $\sqrt{\frac{1}{7+\sqrt{13}}} + \sqrt{\frac{1}{7-\sqrt{13}}}$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{3}+1$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴)  $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$

۴۵ اگر مساحت مستطیلی برابر  $x^2 - 4$  و یکی از اضلاع آن  $\frac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1}$  باشد، آنگاه ضلع دیگر کدام است؟ (تمامی عبارت‌ها تعریف شده‌اند.)

- (۱)  $x^2 - x + 2$  (۲)  $x^2 - 3x - 2$  (۳)  $x^2 - x - 2$  (۴)  $x^2 + x - 2$

۴۶) اگر  $x^2 + x = 1$  باشد، حاصل عبارت  $x^6 + 4x^3$  کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۴۷) حاصل عبارت  $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{5}-2}} \times (\sqrt{5} + \sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{5}+2}} \times (8 + 2\sqrt{15})^{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $2\sqrt{5}$  (۲)  $4\sqrt{5}$  (۳) ۱۶ (۴)

۴۸) حاصل عبارت تعریف شده  $\left(1 - \frac{2}{x^6 + x^2}\right) \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1}\right) - \frac{2}{x^2}$  کدام است؟

- $\frac{1}{x^2}$  (۱) ۱ (۲)  $1 + \frac{1}{x^2}$  (۳) ۴ (۴) صفر

۴۹) در تجزیه عبارت  $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$ ، کدام عامل ضرب وجود دارد؟

- $x - 4$  (۱)  $x - 2$  (۲)  $x + 2$  (۳)  $x + 3$  (۴)

۵۰) اگر  $A = \frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}$  باشد، حاصل  $(A + \sqrt[3]{2})^3$  کدام است؟

- ۱ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴)

۵۱) اگر  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$  باشد، مقدار  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  کدام است؟

- $\pm 5$  (۱)  $\pm 110$  (۲)  $\pm 115$  (۳)  $\pm 125$  (۴)

۵۲) حاصل ساده شده کسر  $\frac{a}{a-1} - \frac{1}{a^2+a+1} - \frac{2+a^2}{a^2-1}$  (که  $a \neq 1$ ) کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲)  $a$  (۳)  $-a$  (۴)

۵۳) اگر  $4^x + 4^{-x} = 5 + 4\sqrt{3}$  باشد، حاصل  $2^x + \frac{1}{2^x}$  کدام است؟

- $\sqrt{3} + 1$  (۱)  $\sqrt{3} + 2$  (۲)  $\sqrt{3} - 1$  (۳)  $2\sqrt{3} - 1$  (۴)

۵۴) اگر  $ab = 8$  و  $a - b = 7$  باشد، حاصل  $A = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$  کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۱ (۳)  $\sqrt[3]{2}$  (۴)

۵۵) اگر  $x = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$  باشد، حاصل  $\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x-1}$  کدام است؟

- $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$  (۱)  $(\sqrt{3+\sqrt{2}})(2+\sqrt{2})$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)  $(\sqrt{3+\sqrt{2}}+1)(2-\sqrt{2})$  (۳)

۵۶) حاصل عبارت  $\frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{49}} + \frac{1}{\sqrt{51}+\sqrt{50}} + \frac{1}{\sqrt{52}+\sqrt{51}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4961}+\sqrt{4960}}$  کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۱۱ (۲) ۱۰ (۳) ۱۳ (۴)

۵۷) اگر  $(a + \frac{1}{a})^2 = 6$ ،  $a > 0$ ، باشد،  $a^3 + \frac{1}{a^3}$  برابر کدام است؟

- $4\sqrt{6}$  (۱)  $3\sqrt{6}$  (۲)  $\sqrt{6}$  (۳)  $5\sqrt{6}$  (۴)

۵۸) حاصل عبارت  $A = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt[3]{12} - \sqrt{6}$  (۲)  $\sqrt[3]{12} - \sqrt{6} + 4$  (۳)  $\sqrt[3]{12} - \sqrt{6} - 4$  (۴)  $\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{6} - 4$

۵۹) مجموع ارقام عدد  $999 \times 1001$  برابر کدام گزینه است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۵۴ (۳) ۲۷ (۴) ۶۳

۶۰) اگر  $x = \frac{1}{y} = \sqrt{2} - 1$ ، آنگاه حاصل عبارت  $A = \frac{x^2 y + x y^2}{(x - xy)(y + xy)}$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳)  $\sqrt{2}$  (۴)  $-\sqrt{2}$

۶۱) عبارت گویای  $\frac{x^2 - 4}{ax^2 + bx + 3}$  به ازای مقادیر  $x = 2$  و  $x = -3$  تعریف نشده است. مقدار  $a, b$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{6}$  (۲) -۱ (۳)  $\frac{1}{6}$  (۴) ۱

۶۲) اگر  $\frac{1}{x} = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x(x-1)}$  کدام است؟ ( $x \neq 1$ )

- (۱)  $\frac{4}{21}$  (۲) ۷ (۳)  $\frac{1}{6}$  (۴)  $\frac{35}{14}$

۶۳) به ازای چه مقداری از  $a$  تساوی  $(\sqrt[3]{7} - 4\sqrt[3]{3} + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{a}) = 3\sqrt[3]{2}$  برقرار است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۹ (۴) ۸۱

۶۴) اگر  $a + b\sqrt{c} = \sqrt{22 - 6\sqrt{8} + \sqrt{28}} = a + b\sqrt{c}$  باشد، حاصل  $a + b + c$  کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۶۵) حاصل عبارت  $P = (\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x})(\frac{3}{4x} + \frac{x}{4} - x)$  به ازای  $x = 2 - \sqrt{3}$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲)  $1 + 2\sqrt{3}$  (۳)  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴) ۳

۶۶) حاصل عبارت  $\frac{(3\sqrt{3}-1)(28+3\sqrt{3})}{(1-2\sqrt{3})(1+2\sqrt{3})}$  کدام است؟

- (۱)  $3^{\frac{2}{3}} - 3^{-3}$  (۲)  $3^{-3} - 3^{\frac{2}{3}}$  (۳)  $3^3 - 3^{-\frac{2}{3}}$  (۴)  $3^{-\frac{2}{3}} - 3^3$

۶۷) اگر  $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 = 9$  و  $A = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  باشد، حاصل  $A^3$  کدام است؟

- (۱)  $7 + 3A$  (۲)  $3 + A^3$  (۳)  $3 + 3A$  (۴)  $11 + 3A$

۶۸) حاصل عبارت  $\frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{-8} \times \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{4}}$  کدام است؟

- (۱)  $-\sqrt[3]{4}$  (۲)  $-\sqrt[3]{2}$  (۳) -۲ (۴)  $-\frac{\sqrt[3]{4}}{4}$

۶۹) اگر  $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$  باشد، حاصل  $x^3 - \frac{1}{x^3}$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) +۱ (۲) -۴ (۳) +۳ (۴) -۳

۷۵) حاصل عبارت  $\frac{1}{\sqrt{45}-\sqrt{46}} - \frac{1}{\sqrt{46}-\sqrt{47}} + \frac{1}{\sqrt{47}-\sqrt{48}} - \dots + \frac{1}{\sqrt{35}-\sqrt{36}}$  کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) -۱۱ (۳) -۱۰ (۴) ۱۱

۷۶) حاصل عبارت  $\frac{2}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}}{x+1}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{10\sqrt{x}+x+1}{x-1}$  (۲)  $\frac{10x\sqrt{x}-x}{x^2-1}$  (۳)  $\frac{10\sqrt{x}}{x+1}$  (۴)  $\frac{10\sqrt{x}-x-1}{x^2-1}$

۷۷) اگر  $a = \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1$ ، آنگاه  $\frac{4}{a} + 1$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲)  $\sqrt[3]{5}$  (۳)  $\sqrt[3]{5} - 1$  (۴)  $\sqrt[3]{5} + 2$

۷۸) حاصل  $A = 2(7 - 4\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} + (13 + 4\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۷۹) حاصل  $\sqrt[3]{8x^3} + \sqrt{x^2} - 2\sqrt[3]{(-x)^3} + \sqrt[4]{x^4}$  به ازای  $x < 0$ ، کدام است؟

- (۱)  $2x$  (۲)  $x$  (۳)  $-2x$  (۴)  $-x$

متوسط

درصد پاسخگویی ۴۳%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۲

سوال ۱

گزینه «۲»

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 4x + 2 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x + 1 \\ &= (x+1)^3 + x + 1 \xrightarrow{x=\sqrt{2}-1} (\sqrt{2}-1+1)^3 + \sqrt{2}-1+1 \\ &= (\sqrt{2})^3 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۸%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۳

سوال ۲

گزینه «۳»

$$\frac{\sqrt[3]{6} \times (\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{18}}} = \frac{\sqrt[3]{6} \times (\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{18}}} = \frac{\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۴%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه های دام دار ۴

گزینه درست: ۱

سوال ۳

گزینه «۱»

$$\frac{x^2-1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} = 2$$

طرفین رابطه بالا را به توان ۳ می‌رسانیم داریم:

$$x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x^2 \left(\frac{1}{x}\right) + 3x \left(\frac{1}{x^2}\right) = 8$$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x + \frac{3}{x} = 8$$

$$\Rightarrow \frac{x^3-1}{x^3} - 3 \left(x - \frac{1}{x}\right) = 8$$

$$\frac{x^3-1}{x^3} = 14 \Rightarrow \frac{x^3}{x^3-1} = \frac{1}{14}$$

سوال ۴

گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۴۰%

متوسط

گزینه «۱»

به اتحاد مکعب مجموع و تفاضل دقت کنید:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 6a^2b + 2b^3$$

بنابراین حاصل  $(3+\sqrt{2})^3 - (3-\sqrt{2})^3$  با فرض  $a=3$  و  $b=\sqrt{2}$  برابر است با:

$$= 6 \times 3^2 \times \sqrt{2} + 2(\sqrt{2})^3 = 54\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 58\sqrt{2}$$

سوال ۵

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۴۰%

متوسط

گزینه «۲»

$$a = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^{30}}} = ((2^{30})^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{30}{3 \times 4}} = 2^{\frac{30}{12}}$$

$$A = a^{\sqrt{a^3}} \sqrt[5]{a^7} = a \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{7}{5}} = a^{\frac{30+15+14}{20}} = a^{\frac{59}{20}} \xrightarrow{a=2^{\frac{30}{12}}} 2^{\frac{59}{20} \times \frac{30}{12}}$$

$$A = (2^{\frac{30}{12}})^{\frac{59}{20}} = 2^{\frac{30}{12} \times \frac{59}{20}} = 2^7 = 128$$

سوال ۶

گزینه درست: ۴

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۳%

دشوار

گزینه «۴»

$$\frac{12}{\sqrt{7}+2} = \frac{12(\sqrt{7}-2)}{7-4} = 4(\sqrt{7}-2) = 4\sqrt{7}-8$$

$$\frac{18}{\sqrt{7}-1} = \frac{18(\sqrt{7}+1)}{7-1} = 3\sqrt{7}+3$$

$$\frac{12}{\sqrt{7}+3} = \frac{12(\sqrt{7}-3)}{7-9} = -6\sqrt{7}+18$$

پس داریم:

$$(4\sqrt{7}-8+3\sqrt{7}+3-6\sqrt{7}+18)(13-\sqrt{7})$$

$$= (13+\sqrt{7})(13-\sqrt{7}) = 169-7 = 162$$



سوال ۷

گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۱%

متوسط

ابتدا طرف دوم تساوی را با گویا کردن مخرج کسرهای به یک کسر تبدیل می‌کنیم و سپس با مقایسه با طرف اول تساوی، عبارت  $A$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} &= \frac{2\sqrt{x}+2}{x-1} \\ \frac{1}{\sqrt[5]{x}-1} \times \frac{(\sqrt[5]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt[5]{x}+1)(\sqrt{x}+1)} &= \frac{\sqrt[5]{x^5}+\sqrt[5]{x}+\sqrt{x}+1}{(\sqrt[5]{x^5}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{2x^2+\sqrt[5]{x}\sqrt{x}+\sqrt{x}+1}{x-1} \Rightarrow \text{عبارت} = \frac{3+2\sqrt{x}+2+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}\sqrt{x}+1}{x-1} \\ &= \frac{6+3\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}}{x-1} = \frac{6+3\sqrt{x}+A}{x-1} \Rightarrow A = \sqrt[5]{x^2} + \sqrt[5]{x} \end{aligned}$$

سوال ۸

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۴۰%

متوسط

گزینه «۲»

ابتدا مخرج را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{48} - \sqrt{12} - \sqrt{8} &= \sqrt{16 \times 3} - \sqrt{4 \times 3} - \sqrt{4 \times 2} \\ &= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \\ \frac{2}{\sqrt{48} - \sqrt{12} - \sqrt{8}} &= \frac{2}{2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

سوال ۹

گزینه درست: ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۵%

متوسط

گزینه «۳»

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x^2-1} &= \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{1}{x^2-1} \\ &= \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{2(x+1)+1}{x^2-1} = \frac{2x+3}{x^2-1} \\ \Rightarrow \frac{2x+3}{x^2-1} &= \frac{ax+b}{x^2-1} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow ab=6 \end{aligned}$$

سوال ۱۰

گزینه درست: ۲

گزینه های دام دار ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۰%

دشوار

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{18} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \\ \sqrt[5]{250} - \sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{5^3 \times 2} - \sqrt[5]{2^4} = 5\sqrt[5]{2} - 2\sqrt[5]{2} = 3\sqrt[5]{2} \end{cases} \\ \Rightarrow 5\sqrt{2} \times 3\sqrt[5]{2}x = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{15\sqrt{2} \times \sqrt[5]{2}} \\ \Rightarrow x = \frac{1}{30\sqrt{2}} = \frac{1}{30\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{60} \end{aligned}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۲٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۳

سوال ۱۱

گزینه «۳»

$$A = \sqrt[5]{2^5} \times (2^2)^{\frac{1}{5}} \times (2^{-1})^{-\frac{5}{5}} = (2^{2/5})^{\frac{1}{5}} \times 2^{1/5} = 2^{0/5} \times 2^{1/5} = 2^2 = 4$$

$$B = ((\sqrt{3}+1)^{\frac{1}{2}} \times (\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{2}} \times (2^2)^{\frac{1}{2}})$$

$$= \underbrace{((\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1))}^{\text{مزدوج}})^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{2}} = (3-1)^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{2}} = 2$$

$$\Rightarrow A + B = 6$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۸٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۲

سوال ۱۲

گزینه «۲»

راه حل اول:

$$4^{0/75} = (2^2)^{0/75} = 2^{1/5} = \sqrt[5]{2^3} = 2\sqrt{2}$$

$$9^{0/25} = (3^2)^{0/25} = 3^{0/5} = \sqrt{3}$$

از طرفی:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

بنابراین حاصل عبارت برابر است با:

$$2\sqrt{2} \times \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{2}$$

راه حل دوم: از آنجایی که حاصل عبارت از  $\sqrt{3} = 9^{0/25}$  بزرگتر است بنابراین با توجه به گزینه‌ها، تنها گزینه‌ی بزرگتر از  $\sqrt{3}$ ، گزینه (۲) است.

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۳٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۴

سوال ۱۳

گزینه «۴»

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\frac{1}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2^2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2^2}}{2^2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2^2}} = \frac{4 + 2\sqrt{2} + \sqrt{4}}{2^3 - (\sqrt{2})^3}$$

$$= \frac{4 + \sqrt{4^3} \times 2 + \sqrt{4}}{8-2} = \frac{4 + \sqrt{16} + \sqrt{4}}{6}$$

پس اگر مخرج ۶ باشد، صورت کسر  $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16} + 4$  است.

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۶٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۲

سوال ۱۴

$$x^3 - 8y^3 = (x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) \Rightarrow A = x^2 + 2xy + 4y^2$$

$$\Rightarrow A + 3xy = x^2 + 5xy + 4y^2 = (x+y)(x+4y)$$

سوال ۱۵

گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۳۰٪

متوسط

گزینه «۱»

$$y^4 - 3y^2 + 1 = y^4 - 2y^2 + 1 - y^2 = (y^2 - 1)^2 - y^2$$

$$= (y^2 - 1 - y)(y^2 - 1 + y)$$

سوال ۱۶

گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۶۴٪

ساده

گزینه «۱»

$$(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = 8x^3 - y^3 \quad x = \frac{1}{2} \quad \frac{y = \frac{1}{3}}{y = \frac{1}{3}} \quad 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$= 8\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{27} = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$$

سوال ۱۷

گزینه درست: ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۷٪

متوسط

گزینه «۳»

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{3 + 4 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2(2)(\sqrt{3})}$$

$$= \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$$

با توجه به گزینه‌ها با  $\sqrt{3}$  باید جمع شود.

سوال ۱۸

گزینه درست: ۴

گزینه های دام دار ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۷٪

متوسط

گزینه‌ی «۴»

$$\frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{28}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{28}-\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا کردن هردو کسر}} \times \frac{(3\sqrt{3}-1)(4-\sqrt{3})}{(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})} + \frac{1 \times (2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{12\sqrt{3}-9-4+\sqrt{3}}{16-3} + \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = \frac{13\sqrt{3}-13}{13} + 2 + \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} - 1 + 2 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 1$$

$$\xrightarrow{\text{حال طرفین را برابر هم قرار می دهیم}} 2\sqrt{3} + 1 = k(2\sqrt{3} + 1) \Rightarrow k = 1$$

$$\sqrt[3]{k} = \sqrt[3]{1} = 1$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۳%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۳

سوال ۱۹

گزینه «۳»

با ساده کردن عبارت داده شده داریم:

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt[5]{9\sqrt{3}} (12)^{-1/5} = \sqrt[5]{9\sqrt{3} \times 3} (2^2 \times 3)^{-\frac{1}{5}} \\
 &= \sqrt[5]{3^5} \times (2^2)^{-\frac{1}{5}} \times (3)^{-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{5}} \times 2^{-\frac{2}{5}} \times 3^{-\frac{1}{5}} \\
 &= 3^{\frac{1}{5} - \frac{1}{5}} \times 2^{-\frac{2}{5}} = 3^{-1} \times 2^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[5]{4}} = \frac{1}{3\sqrt[5]{4}}
 \end{aligned}$$

حال حاصل  $(1 + A^{-1})^{\frac{1}{5}}$  را به دست می‌آوریم:

$$(1 + A^{-1})^{\frac{1}{5}} = (1 + 24)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{25} = 5$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۲%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۳

سوال ۲۰

گزینه «۳»

$$(2x - 3)^2 + 1 = 3 \Rightarrow (2x - 3)^2 = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{2}}{2} \\ 2x - 3 = -\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{3 - \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = \left| \frac{3 + \sqrt{2}}{2} - \frac{3 - \sqrt{2}}{2} \right| = \left| \frac{2\sqrt{2}}{2} \right| = \sqrt{2}$$

ساده

درصد پاسخگویی ۴۹%

قلمچی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۲

سوال ۲۱

گزینه «۲»

ابتدا دو طرف تساوی  $x + y = 4\sqrt{xy}$  را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x + y)^2 = (4\sqrt{xy})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 16xy$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 14xy$$

تساوی حاصل را در کسر داده شده جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{(x^2 + y^2) + 4xy}{(x^2 + y^2) - 5xy} = \frac{14xy + 4xy}{14xy - 5xy} = \frac{18xy}{9xy} = 2$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۴%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۴

سوال ۲۲

گزینه «۴»

گویا شده هر کسر با خود کسر برابر می‌باشد، بنابراین:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}} &= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt[3]{a})(\sqrt{a} + 2\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a})}{a} \\
 \Rightarrow a &= (\sqrt{a} - \sqrt[3]{a})(\sqrt{a} + \sqrt[3]{a})(\sqrt{a} + 2\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}) \\
 \Rightarrow a &= ((\sqrt{a})^2 - (\sqrt[3]{a})^2)(\sqrt{a} + 2\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}) \\
 \Rightarrow a &= (a - \sqrt[3]{a})(a + 2\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}) \\
 \Rightarrow a &= a^2 - (\sqrt[3]{a})^3 = 8 - 2 = 6
 \end{aligned}$$

سوال ۲۳

گزینه درست: ۴

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۰٪

متوسط

گزینه «۴»

$$\begin{aligned}
 A &= \underbrace{(x-2)(x+2)}_{\text{اتحاد مزدوج}} (x^6 + 4x^2 + 16) + 60 \\
 &= \underbrace{(x^2 - 4)(x^6 + 4x^2 + 16)}_{\text{اتحاد تفاضل مکعبات}} + 60 = (x^2)^3 - 4^3 + 60 \\
 &= x^6 - 4 \xrightarrow{x=\sqrt[3]{5}} A = (\sqrt[3]{5})^6 - 4 = 5^{\frac{6}{3}} - 4 \\
 &= 5^2 - 4 = 25 - 4 = 21
 \end{aligned}$$

سوال ۲۴

گزینه درست: ۴

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۴۲٪

متوسط

ابتدا از  $y$  فاکتور گرفته و سپس از اتحاد یک جمله‌ی مشترک استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 y^5 + 2y^3 - 24y &= y(y^4 + 2y^2 - 24) \\
 &= y \left( (y^2)^2 + 2y^2 - 24 \right) = y(y^2 + 6) \underbrace{(y^2 - 4)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \\
 &= y(y^2 + 6)(y - 2)(y + 2)
 \end{aligned}$$

سوال ۲۵

گزینه درست: ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۳٪

متوسط

گزینه «۳»

با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله داریم:

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{3}} \\
 &= \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3} \\
 A + A^{-1} &= A + \frac{1}{A} = 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} + \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \\
 &= 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4
 \end{aligned}$$

سوال ۲۶

گزینه درست: ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۳٪

متوسط

گزینه‌ی «۳»

می‌دانیم:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} a^3 + \frac{1}{a^3} = (a + \frac{1}{a})(a^2 + \frac{1}{a^2} - 1) \\ (a + \frac{1}{a})^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 \Rightarrow 9 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 7 \end{cases} \\
 a^3 + \frac{1}{a^3} - 2 = (a + \frac{1}{a})(a^2 + \frac{1}{a^2} - 1) - 2 = 3 \times (7 - 1) - 2 = 16
 \end{aligned}$$

گزینه‌ی «۴»

راه حل اول: عبارت  $X = (\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})^{\frac{2}{3}} \sqrt{2\sqrt{2}}$  را در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$\begin{aligned} X^{\frac{3}{2}} &= (\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})^{\frac{2}{3}} (\sqrt[3]{2\sqrt{2}})^{\frac{3}{2}} \\ &= (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})})^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{8} \\ \rightarrow X^{\frac{3}{2}} &= (4 + 2\sqrt{4-3}) \times 2 = 12 \rightarrow X = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} &(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}) \sqrt[3]{\sqrt{2\sqrt{2}} \times 2} \\ &= (\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}) \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}} \\ &= (\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}) \sqrt{2} \end{aligned}$$

$\sqrt{2}$  را در عبارت پُرانتز ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &= \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} \\ &= \sqrt{3}-1 + \sqrt{3}+1 = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 - 16x^2 &\xrightarrow[\text{اتحاد مزدوج}]{\text{فکتور می‌گیریم از } x^2} x^2(x^2 - 16) = x^2(x^2 - 4)(x^2 + 4) \\ \Rightarrow x^2(x^2 - 4)(x^2 + 4) &= x^2(x-2)(x+2)(x^2 + 4) \end{aligned}$$

گزینه «۴»

$$\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{10}}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{9+2\sqrt{8}}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{8}+\sqrt{1})^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}+1} = \sqrt{2}-\sqrt{4}$$

پس حاصل عبارت برابر جمع عبارات بالا یعنی:  $\sqrt{5}-1$  است.



سوال ۳۴

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۴%

متوسط

گزینه «۲»

$$\frac{y^5 - y^2 - 12y}{\lambda y^2 + 12y} = \frac{y(y^4 - y^2 - 12)}{\lambda y(y+2)}$$

$$= \frac{y(y^2 - 4)(y^2 + 3)}{\lambda y(y+2)} = \frac{y(y-2)(y+2)(y^2 + 3)}{\lambda y(y+2)}$$

$$= \frac{1}{\lambda} (y-2)(y^2 + 3) \text{ و } y \neq 0, -2$$

پس کسر شامل عامل  $y-2$  است

گزینه «۱»

سوال ۳۵

گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۳%

متوسط

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} = \sqrt{4}-\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1}-1 = \frac{x}{4} \Rightarrow \sqrt{x+1} = \frac{x+4}{4} \Rightarrow 4\sqrt{x+1} = x+4$$

$$\Rightarrow 16(x+1) = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=8 \end{cases}$$

در نتیجه  $x=8$  می‌باشد.

گزینه «۲»

سوال ۳۶

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۹%

دشوار

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1} \times \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+1+\sqrt[3]{x}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1} = \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$$

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{x-1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{2}{3}}}{x-1} = \frac{x^{\frac{1}{6}}(x^{\frac{1}{3}}-1)}{x-1}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}{x-1} \Rightarrow A = \sqrt[6]{x}-1$$



سوال ۳۷

گزینه درست: ۴

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۹%

متوسط

گزینه «۴»

از طرفین رابطه اول، ۴ واحد کم می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 4 = 29 - 4 \Rightarrow \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 = 25 \Rightarrow x - \frac{2}{x} = \pm 5$$

عبارت  $x^3 - \frac{8}{x^3}$  را به کمک اتحاد تفاضل مکعبات دو جمله تجزیه می‌کنیم:

$$x^3 - \frac{8}{x^3} = \underbrace{\left(x - \frac{2}{x}\right)}_{\pm 5} \underbrace{\left(x^2 + \frac{4}{x^2} + 2\right)}_{29} = \pm 5 \times 31 = \pm 155$$

سوال ۳۸

گزینه درست: ۴

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۴%

دشوار

$$\begin{aligned} 1) 12x^6 - 48x^5 &= 12x^5(x^1 - 4) = 12x^5(x - 2)(x + 2) \\ 2) x^8 - 625x^5 &= x^5(x^3 - 625) = x^5(x^3 - 25)(x^2 + 25) \\ &= x^5(x - 5)(x + 5)(x^2 + 25) \\ 3) x^6 - 12x^5 + 36 &= (x^2 - 6)(x^2 - 9) \\ &= (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3) \\ 4) x^4 + 4 + y^4 + 4x + 4y + 2xy &= (x + 2 + y)^2 \end{aligned}$$

گزینه «۳»

برای گویا کردن یکی از توان‌ها باید صورت و مخرج آن را در مزدوج مخرج ضرب کرد:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \Rightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \times (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\ &= [(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})]^{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = (3 - 2)^{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\ &= 1^{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = 1 \end{aligned}$$

گزینه «۳»

گزینه درست: ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۹%

دشوار

$$z = xy + y + 1 = (\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{2} + 1) + \sqrt[3]{2} + 1 + 1 = \sqrt[3]{2} + 1 + \sqrt[3]{2}$$

$$zx = (\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + 1) = (\sqrt[3]{2})^3 - 1 = 1 \quad \text{از طرفی داریم:}$$

بنابراین  $\frac{1}{z} = x$  می‌شود. پس:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^3} + \frac{6}{z^2} + \frac{12}{z} + 8 &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3 \\ &= (\sqrt[3]{2} - 1 + 2)^3 = (\sqrt[3]{2} + 1)^3 = y^3 \end{aligned}$$

سوال ۴۱

گزینه درست: ۲

گزینه های دام دار ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۰٪

متوسط

گزینه «۲»

$$\begin{aligned}
 x\sqrt{y} + y\sqrt{x} &= A \xrightarrow{\text{به توان } ۲} \\
 x^۲y + y^۲x + ۲xy\sqrt{xy} &= A^۲ \\
 \Rightarrow xy(x + y + ۲\sqrt{xy}) &= A^۲ \\
 \Rightarrow ۴(۶ + ۴) &= A^۲ \Rightarrow A = \pm\sqrt{۴۰} \xrightarrow{A > ۰} A = \sqrt{۴۰}
 \end{aligned}$$

سوال ۴۲

گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۰٪

متوسط

گزینه «۱»

فرض کنیم:  $B = \sqrt{۲ - \sqrt{۳}} + \sqrt{۲ + \sqrt{۳}}$  باشد، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned}
 B^۲ &= (۲ - \sqrt{۳}) + ۲\sqrt{(۲ - \sqrt{۳})(۲ + \sqrt{۳})} + ۲ + \sqrt{۳} \\
 &= ۲ - \sqrt{۳} + ۲\sqrt{۴ - ۳} + ۲ + \sqrt{۳} = ۶ \Rightarrow B^۲ = ۶ \Rightarrow B = \sqrt{۶}
 \end{aligned}$$

با معلوم شدن مقدار  $B$  در عبارت اصلی، مقدار  $A$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{۲ + \sqrt{۳}} + \sqrt{۲ - \sqrt{۳}}) \sqrt[۳]{\sqrt{۲}^۳} &= \sqrt{۶} \times \sqrt{۲} = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳} \\
 \Rightarrow ۲\sqrt{۳} &= ۲\sqrt{۳}(A + ۲) \Rightarrow ۱ = A + ۲ \Rightarrow A = -۱ \\
 \Rightarrow (-۱)^۲ &= ۱
 \end{aligned}$$

سوال ۴۳

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۹٪

دشوار

گزینه ی «۲»

ابتدا مخرج کسرها را با استفاده از اتحادهای:

$$(a - b)(a^۲ + ab + b^۲) = a^۳ - b^۳, (a + b)(a^۲ - ab + b^۲) = a^۳ + b^۳$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt[۳]{۶} + \sqrt[۳]{۴} + 1} &= \frac{\sqrt[۳]{۶} - 1}{(\sqrt[۳]{۶} - 1)(\sqrt[۳]{۶} + \sqrt[۳]{۴} + 1)} = \frac{\sqrt[۳]{۶} - 1}{۲ - 1} = \sqrt[۳]{۶} - 1 \\
 \frac{۳}{\sqrt[۳]{۶} - \sqrt[۳]{۴} + 1} &= \frac{۳(\sqrt[۳]{۶} + 1)}{(\sqrt[۳]{۶} + 1)(\sqrt[۳]{۶} - \sqrt[۳]{۴} + 1)} \\
 &= \frac{۳(\sqrt[۳]{۶} + 1)}{۲ + 1} = \sqrt[۳]{۶} + 1
 \end{aligned}$$

بنابراین:

$$A = \sqrt[۳]{۶} - 1 + \sqrt[۳]{۶} + 1 = ۲\sqrt[۳]{۶}$$

سوال ۴۴

گزینه درست: ۳

قلم‌چی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۳۳٪

متوسط

گزینه «۳»

$$\sqrt{\frac{1}{\mathbf{F}+\sqrt{\mathbf{F}^2}}} = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{F}+\mathbf{F}\sqrt{\mathbf{F}}}} = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{\mathbf{F}+1})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{F}+1}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\mathbf{F}-\sqrt{\mathbf{F}^2}}} = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{F}-\mathbf{F}\sqrt{\mathbf{F}}}} = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{\mathbf{F}-1})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{F}-1}}$$

پس عبارت مورد نظر سوال، برابر است با:

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{F}+1}} + \frac{1}{\sqrt{\mathbf{F}-1}} = \frac{(\sqrt{\mathbf{F}-1})+(\sqrt{\mathbf{F}+1})}{(\sqrt{\mathbf{F}+1})(\sqrt{\mathbf{F}-1})} = \frac{\mathbf{F}\sqrt{\mathbf{F}}}{\mathbf{F}-1} = \sqrt{\mathbf{F}}$$

سوال ۴۵

گزینه درست: ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۴٪

دشواری

$$A \times \frac{x^{\mathbf{r}}+\mathbf{r}x+\mathbf{r}}{x^{\mathbf{r}}+\mathbf{r}x+1} = x^{\mathbf{r}} - \mathbf{r}$$

$$\Rightarrow A = (x^{\mathbf{r}} - \mathbf{r}) \left( \frac{x^{\mathbf{r}} + \mathbf{r}x + 1}{x^{\mathbf{r}} + \mathbf{r}x + \mathbf{r}} \right)$$

$$\Rightarrow A = (x - \mathbf{r})(x + \mathbf{r}) \times \frac{(x+1)^{\mathbf{r}}}{(x+1)(x+\mathbf{r})}$$

$$\Rightarrow A = (x - \mathbf{r})(x + 1) = x^{\mathbf{r}} - x - \mathbf{r}$$

سوال ۴۶

گزینه درست: ۱

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۴٪

متوسط

عبارت  $x^{\mathbf{r}} + x$  را به توان ۳ می‌رسانیم. طبق اتحاد مکعب دو جمله‌ای داریم:

$$x^{\mathbf{r}} + x = 1 \xrightarrow{\text{توان ۳}} x^{\mathbf{r}} + x^{\mathbf{r}} + x^{\mathbf{r}} + \mathbf{r}(x^{\mathbf{r}})(x) \left( \underbrace{x^{\mathbf{r}} + x}_1 \right) = 1$$

$$\Rightarrow x^{\mathbf{r}} + x^{\mathbf{r}} + \mathbf{r}x^{\mathbf{r}} = 1 \Rightarrow x^{\mathbf{r}} + \mathbf{r}x^{\mathbf{r}} = 1$$

سوال ۴۷

گزینه درست: ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۰٪

متوسط

گزینه «۳»

$$(\mathbf{A} + \mathbf{r}\sqrt{\mathbf{B}})^{\frac{\sqrt{\mathbf{B}}+\mathbf{r}}{\mathbf{r}}} = (\mathbf{B} + \mathbf{r}\sqrt{\mathbf{B}} + \mathbf{r})^{\frac{\sqrt{\mathbf{B}}+\mathbf{r}}{\mathbf{r}}}$$

$$= ((\sqrt{\mathbf{B}} + \sqrt{\mathbf{r}})^{\mathbf{r}})^{\frac{\sqrt{\mathbf{B}}+\mathbf{r}}{\mathbf{r}}} = (\sqrt{\mathbf{B}} + \sqrt{\mathbf{r}})^{\sqrt{\mathbf{B}}+\mathbf{r}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{B}-\mathbf{r}}} \times \frac{\sqrt{\mathbf{B}}+\mathbf{r}}{\sqrt{\mathbf{B}}+\mathbf{r}} = \frac{\sqrt{\mathbf{B}}+\mathbf{r}}{\mathbf{B}-\mathbf{r}} = \sqrt{\mathbf{B}} + \mathbf{r} \quad \text{از طرفی:}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}\sqrt{\mathbf{B}-\mathbf{r}} \times (\sqrt{\mathbf{B}} + \sqrt{\mathbf{r}})^{\sqrt{\mathbf{B}}+\mathbf{r}} \times (\sqrt{\mathbf{B}} - \sqrt{\mathbf{r}})^{\sqrt{\mathbf{B}}+\mathbf{r}} = \mathbf{r}\sqrt{\mathbf{B}-\mathbf{r}} \times \mathbf{r}\sqrt{\mathbf{B}}+\mathbf{r} \\ = \mathbf{r}^2\sqrt{\mathbf{B}} = \mathbf{r}\sqrt{\mathbf{B}}$$

سوال ۴۸

گزینه درست: ۲

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۹%

متوسط

گزینه «۲»

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left(1 - \frac{2}{x^2 + x^2}\right)}_{\text{مخرج مشترک}} \underbrace{\left(1 + \frac{2}{x^2 - 1}\right)}_{\text{مخرج مشترک}} - \frac{2}{x^2} \\ &= \left(\frac{x^2 + x^2 - 2}{x^2 + x^2}\right) \left(\frac{x^2 - 1 + 2}{x^2 - 1}\right) - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{(x^2 + 2)(x^2 - 1)}{x^2(x^2 + 1)} \times \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 + 2}{x^2} - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + 2 - 2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \end{aligned}$$

سوال ۴۹

گزینه درست: ۳

قلم‌چی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۳۹%

متوسط

گزینه «۳»

عبارت‌ها را دسته‌بندی کرده و تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x^5 - 3x^3 + 8x - 24 &= x^3(x - 3) + 8(x - 3) \\ &= (x - 3)(x^3 + 8) = (x - 3)(x + 2)(x^2 - 2x + 4) \end{aligned}$$

عامل  $(x + 2)$  در عبارت وجود دارد.

سوال ۵۰

گزینه درست: ۴

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۰%

متوسط

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{2})^2} \\ &\times \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{3 - 2} = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{A} + \sqrt[3]{2}\right)^3 &= (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2})^3 = 3 \end{aligned}$$

سوال ۵۱

گزینه درست: ۲

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۴%

متوسط

گزینه «۲»

با استفاده از اتحادهای جبری داریم:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 &= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right) = 23 + 2 = 25 \\ \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 &= 25 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \pm 5 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - x^2 \times \frac{1}{x^2}\right) \\ \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} &= \pm 5(23 - 1) = \pm 110 \end{aligned}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۱٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۱

سوال ۵۲

گزینه «۱»

$$\begin{aligned} & \frac{a}{a-1} - \frac{1}{a^x + a + 1} - \frac{x + a^x}{a^x - 1} \\ &= \frac{a}{a-1} - \frac{1}{a^x + a + 1} - \frac{x + a^x}{(a-1)(a^x + a + 1)} \\ &= \frac{(a^x + a^x + a) - (a-1) - (x + a^x)}{a^x - 1} = \frac{a^x + a^x + a - a + 1 - x - a^x}{a^x - 1} \\ &= \frac{a^x - 1}{a^x - 1} = 1 \end{aligned}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۸٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۲

سوال ۵۳

گزینه «۲»

عبارت  $x + \frac{1}{x}$  را به توان دو می‌رسانیم:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + x^{-1})^2 = x^2 + x^{-2} + 2$$

$$= 5 + 4\sqrt{3} + 2 = 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$$

اگر از دو طرف جذر بگیریم، داریم:  $x + x^{-1} = 2 + \sqrt{3}$ 

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۹٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۳

سوال ۵۴

گزینه «۳»

$$A = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \Rightarrow A^3 = a - b - 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})$$

$$\Rightarrow A^3 = 7 - 6A \Rightarrow A^3 + 6A - 7 = 0$$

مجموع ضرایب معادله بالا، برابر صفر است، پس  $A = 1$  یکی از جواب‌های آن است. با تقسیم عبارت بر  $A - 1$  داریم:

$$A^3 + 6A - 7 = (A - 1)(A^2 + A + 7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A^2 + A + 7 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۷٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۴

سوال ۵۵

گزینه «۴»

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{x-1} &= \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+\sqrt{4})^2}-1} = \frac{1}{1+\sqrt{4}-1} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4}}{4} \end{aligned}$$

سوال ۵۶

گزینه درست: ۱

قلم‌چی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۳۲٪

متوسط

گزینه «۱»

$$\frac{1}{\sqrt{49} + \sqrt{50}} \times \frac{\sqrt{50} - \sqrt{49}}{\sqrt{50} - \sqrt{49}} = \frac{\sqrt{50} - \sqrt{49}}{50 - 49} = \sqrt{50} - \sqrt{49}$$

$$\frac{1}{\sqrt{51} + \sqrt{50}} \times \frac{\sqrt{51} - \sqrt{50}}{\sqrt{51} - \sqrt{50}} = \frac{\sqrt{51} - \sqrt{50}}{51 - 50} = \sqrt{51} - \sqrt{50}$$

$$\frac{1}{\sqrt{52} + \sqrt{51}} \times \frac{\sqrt{52} - \sqrt{51}}{\sqrt{52} - \sqrt{51}} = \frac{\sqrt{52} - \sqrt{51}}{52 - 51} = \sqrt{52} - \sqrt{51}$$

$$\frac{1}{\sqrt{361} + \sqrt{360}} \times \frac{\sqrt{361} - \sqrt{360}}{\sqrt{361} - \sqrt{360}} = \frac{\sqrt{361} - \sqrt{360}}{361 - 360} = \sqrt{361} - \sqrt{360}$$

$$\Rightarrow \sqrt{50} - \sqrt{49} + \sqrt{51} - \sqrt{50} + \sqrt{52} - \sqrt{51} + \dots + \sqrt{361} - \sqrt{360}$$

$$= \sqrt{361} - \sqrt{49} = 19 - 7 = 12$$

سوال ۵۷

گزینه درست: ۲

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۲٪

متوسط

گزینه «۲»

$$(a + \frac{1}{a})^2 = 6 \Rightarrow \sqrt{(a + \frac{1}{a})^2} = \sqrt{6} \Rightarrow |a + \frac{1}{a}| = \sqrt{6}$$

چون  $a > 0$  است در نتیجه  $a + \frac{1}{a}$  مثبت است و بنابر این  $a + \frac{1}{a} = \sqrt{6}$ . لذا:

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = (a + \frac{1}{a})^3 - 3(a \times \frac{1}{a})(a + \frac{1}{a})$$

$$= (\sqrt{6})^3 - 3\sqrt{6} = 6\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

سوال ۵۸

گزینه درست: ۱

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۶٪

متوسط

گزینه «۱»

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{12} - 2}{3 - 2} = \sqrt[3]{12} - 2$$

$$\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{6} - 2}{3 - 2} = \sqrt[3]{6} - 2$$

$$A = (\sqrt[3]{12} - 2) - (\sqrt[3]{6} - 2) = \sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{6}$$

سوال ۵۹

گزینه درست: ۲

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۵۸٪

ساده

گزینه «۲»

$$999 \times 1001 = (1000 - 1)(1000 + 1) = 1000^2 - 1 = 1000000 - 1$$

$$= 999999 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 54$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۰٪

قلم‌چی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۴

سوال ۶۰

گزینه «۴»

ابتدا به ساده‌سازی عبارت  $A$  می‌پردازیم:

$$A = \frac{x^2y + xy^2}{(x - xy)(y + xy)} = \frac{xy(x + y)}{xy(1 - y)(1 + x)} = \frac{x + y}{(1 - y)(1 + x)}$$

حال با به‌دست آوردن مقدار  $y$  می‌توان مقادیر  $x$  و  $y$  را در عبارت  $A$  جایگذاری کرد:

$$\frac{1}{y} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + 1)}{(1 - \sqrt{2} - 1)(1 + \sqrt{2} - 1)} = \frac{2\sqrt{2}}{(-\sqrt{2})(\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2}}{-2} = -\sqrt{2}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۶٪

قلم‌چی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۳

سوال ۶۱

گزینه «۳»

 $x = 2$  و  $x = -3$  ریشه‌های مخرج هستند، یعنی مخرج را صفر می‌کنند.

$$ax^2 + bx + 3 = 0 \xrightarrow{x=2} 4a + 2b + 3 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -3$$

$$ax^2 + bx + 3 = 0 \xrightarrow{x=-3} 9a - 3b + 3 = 0 \Rightarrow 9a - 3b = -3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -3 \\ 9a - 3b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36a + 18b = -27 \\ -36a + 12b = 12 \end{cases}$$

$$30b = -15 \Rightarrow b = -\frac{15}{30} = -\frac{1}{2}$$

$$4a + 2b = -3 \Rightarrow 4a + 2(-\frac{1}{2}) = -3$$

$$\Rightarrow 4a - 1 = -3 \Rightarrow 4a = -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a \cdot b = \frac{1}{4}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۴۰٪

قلم‌چی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۱

سوال ۶۲

گزینه‌ی «۱»

طرفین دو تساوی  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1 = \frac{y}{x}$  و  $A = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x(x-1)}$  را در هم ضرب می‌کنیم:  $\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{x(x-1)} = \frac{y}{x} A$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{y}{x} A \Rightarrow A = \frac{y}{x}$$

دشواری

درصد پاسخگویی ۱۲٪

قلم‌چی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۳

سوال ۶۳

گزینه «۳»

$$(\sqrt[3]{y - 4\sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})(\sqrt[3]{a}) = (\sqrt[3]{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})(\sqrt[3]{a})$$

$$= (\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})(\sqrt[3]{a}) = 3\sqrt{2}$$

طرفین به توان ۲  $\xrightarrow{\quad} (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2 - \sqrt{3}})(\sqrt[3]{a}) = 18$

$$6\sqrt{a} = 18 \Rightarrow \sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 9$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۴%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۱

سوال ۶۴

گزینه «۱»

$$۸ + \sqrt{۲۸} = ۸ + ۲\sqrt{۷} = (\sqrt{۷} + ۱)^۲$$

$$\sqrt{۲۲ - ۶\sqrt{(\sqrt{۷} + ۱)^۲}} = \sqrt{۲۲ - ۶(\sqrt{۷} + ۱)} = \sqrt{۱۶ - ۶\sqrt{۷}}$$

$$= \sqrt{(۳ - \sqrt{۷})^۲} = |۳ - \sqrt{۷}| = ۳ - \sqrt{۷}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \\ b = -۱ \\ c = ۷ \end{cases} \Rightarrow a + b + c = ۹$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۹%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۴

سوال ۶۵

گزینه «۴»

عبارت  $P$  را ساده می‌کنیم:

$$P = \left( \frac{(1+x)^۲ - (1-x)^۲}{(1-x)(1+x)} \right) \left( \frac{۳+x^۲-۴x^۲}{۴x} \right)$$

$$= \left( \frac{(1+x+1-x)(1+x-1+x)}{(1-x)(1+x)} \right) \left( \frac{۳(1-x^۲)}{۴x} \right) = \left( \frac{۴x}{1-x^۲} \right) \left( \frac{۳(1-x^۲)}{۴x} \right) = ۳$$

حاصل  $P$  به ازای  $\mathbb{R} - \{۰, \pm 1\}$  برابر ۳ است.

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۰%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۲

سوال ۶۶

گزینه «۲»

با کمی دقت می‌توان دریافت که صورت و مخرج کسر به‌ترتیب اتحادهای چاق و لاغر و مزدوج هستند.

$$\frac{(۳\sqrt{۳}-۱)(۲۷+۳\sqrt{۳}+۱)}{(1-۲\sqrt{۷})(1+۲\sqrt{۷})} = \frac{(۳\sqrt{۳}-۱)((۳\sqrt{۳})^۲+۳\sqrt{۳}+۱)}{(1-۲\sqrt{۷})(1+۲\sqrt{۷})}$$

$$= \frac{(۳\sqrt{۳})^۳-۱}{1-(۲\sqrt{۷})^۲} = \frac{۲۷ \times ۳\sqrt{۳}-۱}{1-۲۸} = \frac{1-۲۷ \times ۳\sqrt{۳}}{۲۷} = \frac{1}{۲۷} - ۳\sqrt{۳} = ۳^{-۳} - ۳^{\frac{۲}{۲}}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۰%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۱

سوال ۶۷

گزینه «۱»

$$(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳ = a^۳ + b^۳ + ۳ab(a+b)$$

$$\left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^۳ = ۹ \Rightarrow x + \frac{1}{x} + ۲\sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = ۹ \Rightarrow x + \frac{1}{x} = ۷$$

$$A^۳ = \left( \sqrt[۳]{x} + \frac{1}{\sqrt[۳]{x}} \right)^۳ = x + \frac{1}{x} + \underbrace{\sqrt[۳]{x} \times \frac{1}{\sqrt[۳]{x}} + \frac{1}{\sqrt[۳]{x}} \times \sqrt[۳]{x}}_A$$

$$\Rightarrow A^۳ = ۷ + ۳A$$



سوال ۶۸

گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۳%

متوسط

گزینه «۱»

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{-2^3} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[6]{F} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[3]{2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{F} \times \sqrt[3]{-8} \times \sqrt[3]{F}}{\sqrt[3]{F} + \sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{F}} = \frac{\sqrt[3]{F} \times (-\sqrt[3]{2}) \times \sqrt[3]{F}}{\sqrt[3]{F} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{F}} = \frac{-\sqrt[3]{2F^2}}{\sqrt[3]{F} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{F}}$$

$$= -\sqrt[3]{\frac{2F^2}{F}} = -\sqrt[3]{2F} = -\sqrt[3]{F}$$

سوال ۶۹

گزینه درست: ۲

گزینه های دام دار ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۳%

متوسط

گزینه «۲»

با استفاده از اتحاد کمکی  $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$  داریم:

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = (x - \frac{1}{x})^3 + 3x(\frac{1}{x})(x - \frac{1}{x}) \quad (*)$$

حال به کمک اتحاد  $(a + b)^3 - (a - b)^3 = 6ab$ ، مقدار  $x - \frac{1}{x}$  را حساب می‌کنیم:

$$(x + \frac{1}{x})^3 - (x - \frac{1}{x})^3 = 6x \times \frac{1}{x} \xrightarrow{x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}} 5 - (x - \frac{1}{x})^3 = 6$$

$$\Rightarrow (x - \frac{1}{x})^3 = 1 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \pm 1$$

$$(۱) \quad x - \frac{1}{x} = 1 \xrightarrow{(*)} (x - \frac{1}{x})^3 + 3(x - \frac{1}{x}) = 6$$

$$(۲) \quad x - \frac{1}{x} = -1 \xrightarrow{(*)} (x - \frac{1}{x})^3 + 3(x - \frac{1}{x}) = -6$$

سوال ۷۰

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۷%

متوسط

گزینه «۲»

با توجه به این که مخرج کسرها رادیکالی هستند، بایستی هر کسر را جداگانه گویا کرد و سپس کسرها را با هم جمع جبری کرد.

$$\frac{1}{\sqrt{45} - \sqrt{46}} \times \frac{\sqrt{45} + \sqrt{46}}{\sqrt{45} + \sqrt{46}} = \frac{\sqrt{45} + \sqrt{46}}{(\sqrt{45})^2 - (\sqrt{46})^2} = \frac{\sqrt{45} + \sqrt{46}}{45 - 46}$$

$$= \frac{\sqrt{45} + \sqrt{46}}{-1}$$

با درنظر گرفتن حاصل کسر اول، مابقی کسرها را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\sqrt{45} + \sqrt{46}}{-1} - \frac{\sqrt{46} + \sqrt{47}}{-1} + \frac{\sqrt{47} + \sqrt{48}}{-1} - \dots + \frac{\sqrt{45} + \sqrt{46}}{-1}$$

$$= \frac{\sqrt{45} + \sqrt{46} - \sqrt{46} - \sqrt{47} + \sqrt{47} + \sqrt{48} - \dots + \sqrt{45} + \sqrt{46}}{-1}$$

$$= \frac{\sqrt{45} + \sqrt{46}}{-1} = \frac{5 + 6}{-1} = -11$$

سوال ۷۱

گزینه درست: ۴

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۴٪

متوسط

گزینه «۴»

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} &= \frac{(2\sqrt{x}+2)}{x-1}, \quad \frac{3}{\sqrt{x}+1} \times \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{3\sqrt{x}-3}{x-1} \\ \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} &= \frac{2\sqrt{x}+2}{x-1} + \frac{3\sqrt{x}-3}{x-1} = \frac{5\sqrt{x}-1}{x-1} \\ &= \frac{5\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{x+1}{x+1} = \frac{5x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-x-1}{x^2-1} \\ \frac{5\sqrt{x}}{x+1} \times \frac{x-1}{x-1} &= \frac{5x\sqrt{x}-5\sqrt{x}}{x^2-1} \\ \Rightarrow \text{عبارت} &= \frac{10\sqrt{x}-x-1}{x^2-1} \end{aligned}$$

سوال ۷۲

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۳۴٪

متوسط

گزینه «۲»

$$\frac{F}{a} + 1 = \frac{F}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1} + 1$$

با استفاده از اتحاد چاق و لاغر مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{F}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1} \times \frac{\sqrt[3]{5}-1}{\sqrt[3]{5}-1} + 1 &= \frac{F(\sqrt[3]{5}-1)}{5-1} + 1 \\ &= \sqrt[3]{5}-1+1 = \sqrt[3]{5} \end{aligned}$$

سوال ۷۳

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۷٪

متوسط

گزینه «۲»

$$\begin{aligned} 7 - 4\sqrt{3} &= 3 + 4 - 2(2)\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 \\ 13 + 4\sqrt{3} &= 12 + 1 + 2(2\sqrt{3})(1) = (2\sqrt{3} + 1)^2 \\ \Rightarrow A &= 2((2 - \sqrt{3})^2)^{\frac{1}{2}} + ((2\sqrt{3} + 1)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2(2 - \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} + 1) = 4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 1 = 5 \end{aligned}$$

گزینه «۱»

سوال ۷۴

گزینه درست: ۱

گزینه های دام دار ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۵٪

متوسط

$$\sqrt[3]{(-x)^3} = -x, \quad \sqrt[3]{8x^3} = \sqrt[3]{(2x)^3} = 2x$$

$$\sqrt[3]{x^6} = |x|, \quad \sqrt[3]{x^9} = |x|$$

ریشه‌های زوج:

چون  $x < 0$  است، پس عبارت داخل قدرمطلق منفی می‌شود. لذا داریم:

$$\sqrt[3]{8x^3} + \sqrt{x^2} - 2\sqrt[3]{(-x)^3} + \sqrt[3]{x^6} = 2x - x + 2x - x = 2x$$